Упражнение на когерентность

Bartosz Milewski

Перевод:
Геннадий Чернышев
(https://henrychern.wordpress.com/)

В книге МакЛейна «Категории для работающего математика» есть упражнение, которое стало для меня уроком смирения. Несмотря на несколько подсказок, предоставленных МакЛейном, все попытки решить проблему не увенчались успехом. Наконец, поиск в Интернете привел меня к диаграмме, которая выглядела многообещающей и, действительно, позволила решить проблему.

Почему я думаю, что это интересно? Потому, что эта диаграмма показывает сопоставление с образцом и изменение формы, характерное для категорных доказательств. Ключом является использование визуальных представлений и способность постепенно скрывать детали за краткими обозначениями, до тех пор, пока не проявится общая картина.

Упражнение

Это, слегка перефразированное, упражнение 1.1 из главы VII «Моноиды»:

Докажите, что тождество пятиугольника и тождество треугольника приводят к:

$$\begin{tikzcd} 1 \otimes (a \otimes b) \arrow[rr, "\alpha_{1ab}"] \arrow[dr, "\lambda_{a \otimes b}"'] & & (1 \otimes a) \otimes b \arrow[dl, "\lambda_a \otimes b"] \\ & a \otimes b & \end{tikzcd}$$

Прежде всего, постараюсь объяснить, что все это значит. Мы работаем с *моноидальной категорией*, то есть категорией с тензорным произведением.

Для объектов a и b, можно построить их произведение $a \otimes b$. Аналогично, для стрелок $f\colon a \to b$ и $g\colon a' \to b'$, можно сконструировать стрелку

$$f \otimes g : a \otimes b \to a' \otimes b'$$

Другими словами, $\otimes$ — это (би)функтор.

Существует специальный объект 1 , который служит единицей тензорного произведения. Но поскольку в теории категорий избегают использования равенства объектов, законы единицы представляют собой не равенства, а естественные изоморфизмы, компонентами которых являются:

$$\lambda_a : 1 \otimes a \to a$$
$$\rho_a : a \otimes 1 \to a$$

Эти преобразования называются соответственно левым и правым *унитора-ми.* К естественности вернемся позже, когда ее придется использовать.

Мы хотим, чтобы тензорное произведение было ассоциативным, опять же используя естественный изоморфизм, называемый *ассоциатором*:

$$\alpha_{abc} : a \otimes (b \otimes c) \to (a \otimes b) \otimes c$$

Компоненты естественных преобразований — это обычные стрелки, поэтому их можно тензорировать. В частности, можно тензорировать левый унитор λ_a с тождественным естественным преобразованием id, получая:

$$\lambda_a \otimes \mathsf{id}_b : (1 \otimes a) \otimes b \to a \otimes b$$

Поскольку тензорирование с тождеством является распространенной операцией, оно имеет собственное название «вискеринг» и сокращается до $\lambda_a \otimes b$. Каждый раз, когда наблюдается естественная трансформация, связанная с объектом, это сокращение от вискеринг.

Теперь, все готово для понимания диаграммы из этого упражнения.

$$\begin{tikzcd}
1 \otimes (a \otimes b) \arrow[rr, "\alpha_{1ab}"] \arrow[dr, "\lambda_{a\otimes b}"'] & & (1 \otimes a) \otimes b \arrow[dl, "\lambda_a \otimes b"] \\
& a \otimes b &
\end{tikzcd}$$

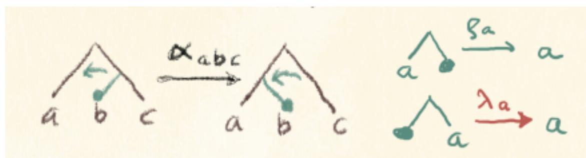
Цель состоит в том, чтобы доказать, что эта диаграмма коммутативна, то есть:

$$\lambda_{a\otimes b} = (\lambda_a \otimes b) \circ \alpha_{1ab}$$

В дальнейшем, для краткости, будем, в основном, опускать знак тензорирования, поэтому приведенное выражение может быть записано как:

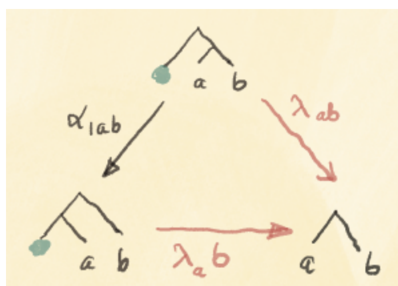
$$\lambda_{ab} = \lambda_a b \circ \alpha_{1ab}$$

Поскольку большая часть доказательства вращается вокруг различных способов заключения в круглые скобки нескольких тензорных произведений, будем использовать простой и понятный графический язык, где произведения в скобках представляются в виде двоичных деревьев. Использование деревьев поможет лучше распознавать формы и шаблоны.



Ассоциатор щелкает переключателем, а униторы поглощают единицу, представленную зеленым пятном.

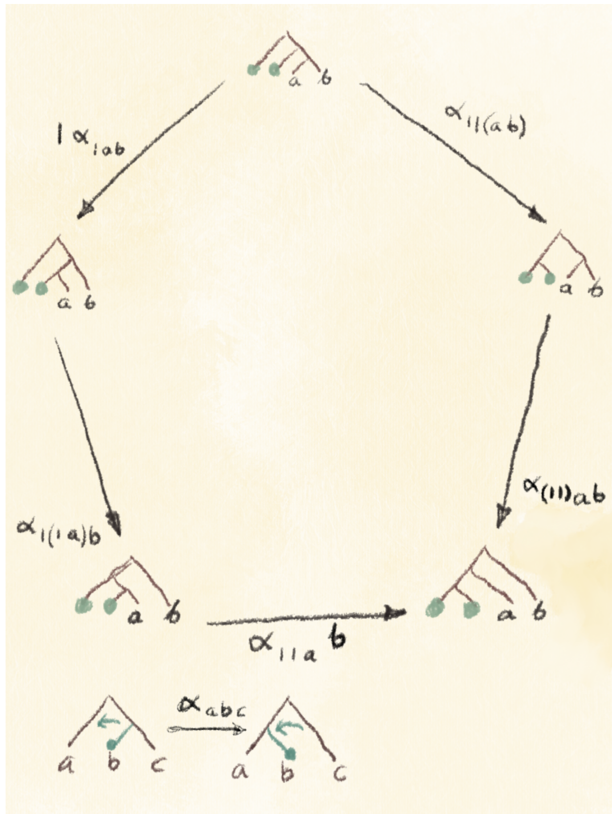
В древовидной записи, наша цель — показать, что следующая диаграмма является коммутативной:



Будем также предполагать, что ассоциатор и униторы удовлетворяют некоторым законам: тождества пятиугольника и тождества треугольника. Они будут вводиться по мере необходимости.

Пятиугольник

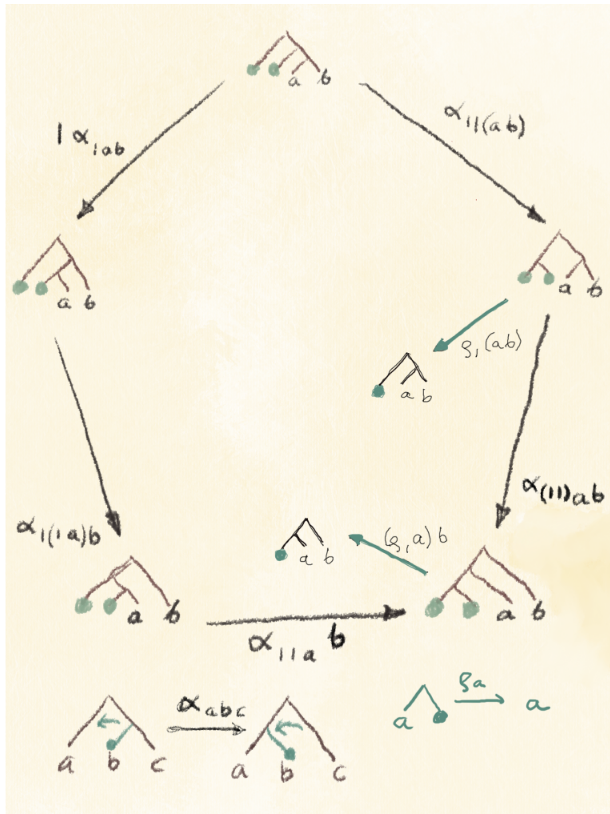
Первый намек, который дает МакЛейн, — начать с пятиугольника, который обычно включает в себя четыре произвольных объекта, и заменить первые два из них единицей. В результате получается коммутативная диаграмма:



Это показывает, что два способа изменения скобок, с $1(1(ab))$ на $((11)a)b)$, эквивалентны. Напомним, что обозначение $\alpha_{11a}b$ внизу означает: удерживайте крайнюю правую b, применяя α к внутреннему дереву. Это пример вискеринга.

Правый унитор

Второй намек немного сбивает с толку. МакЛейн просит добавить ρ в двух местах. Но все деревья имеют единичные объекты в двух крайних левых позициях, так что он наверняка имел в виду λ. Я искал какие-то ошибки в Интернете, но ничего не нашел. Однако, если присмотреться, есть два потенциальных места, где можно применить правый унитор, несмотря на то, что слева от него есть еще одна единица. Так вот оно что!



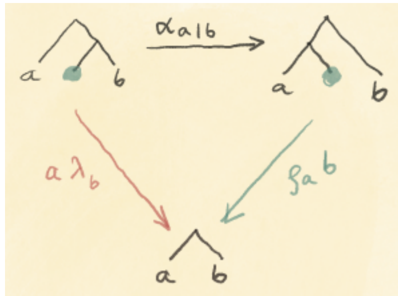
В обоих случаях используем компонент $\rho_1 \colon 1 \otimes 1 \to 1$. В первом случае, оставляем произведение $(a \otimes b)$ неизменным. Во втором случае, применяем вискеринг к ρ_1 с помощью a, а затем применяем вискеринг к результату, с помощью b.

Тождество треугольника

Следующая подсказка советует использовать тождество треугольника. Вот это тождество в диаграммных обозначениях:

$$\begin{tikzcd}
1 \otimes (a \otimes b) \arrow[rr, "\alpha_{1ab}"] \arrow[dr, "\lambda_{a \otimes b}"'] & & (1 \otimes a) \otimes b \arrow[dl, "\lambda_a \otimes b"] \\
& a \otimes b &
\end{tikzcd}$$

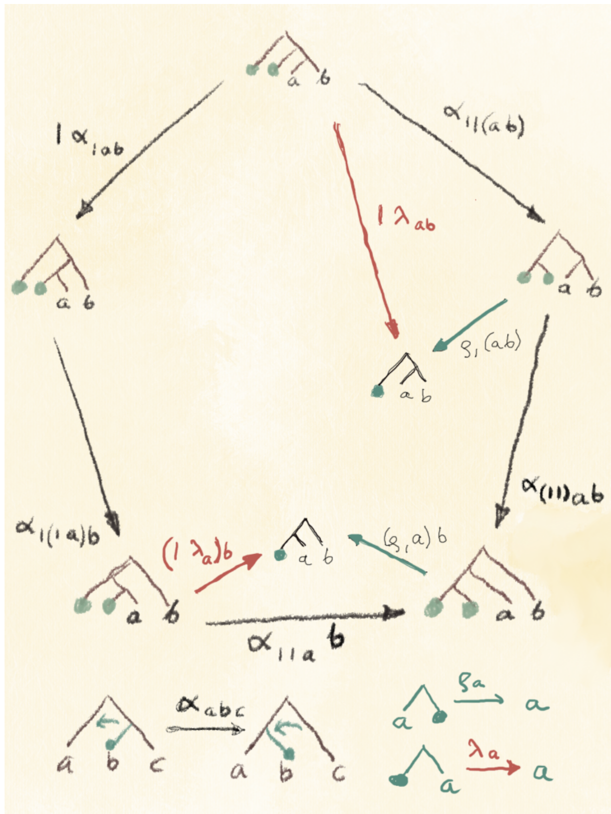
А вот это же, в древовидной записи:



Это можно интерпретировать так: если единица находится посередине, то можно связать ее справа или слева, а затем использовать соответствующий унитор. Результат в обоих случаях будет один и тот же.

Не сразу понятно, где и как применить этот шаблон, обязательно придется немного наморщить лоб.

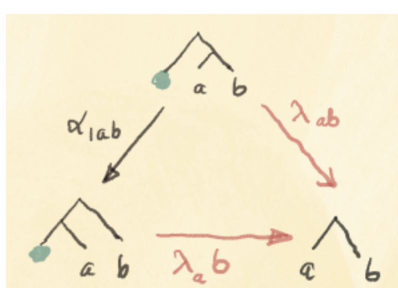
В первом вхождении ρ в приведенном пятиугольнике, имеем $\rho_1 \otimes (a \otimes b)$. Чтобы применить тождество треугольника, нужно сделать в нем две замены. Надо использовать 1 в качестве левого объекта и $(a \otimes b)$ — в качестве правого объекта.



Во втором случае проделываем другой трюк: удерживаем крайнюю правую b на месте и применяем тождество треугольника к внутренней тройке $(1, 1, a)$.

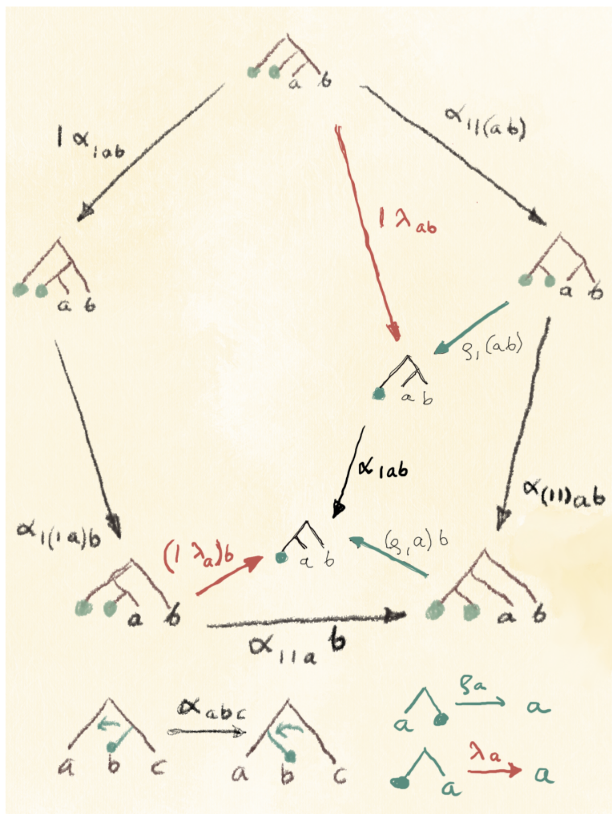
Естественность

Напоминаем о нашей цели:



Можно, почти, увидеть, как она появляется в верхнем левом углу пятиугольника. На самом деле, три дерева — это то, что нужно, за исключением того, что все они умножены слева на единицу. Все, что остается, это соединить точки, используя коммутативные диаграммы.

Сосредоточимся на двух средних деревьях: они отличаются только ассоциативностью, поэтому можно соединить их с помощью α_{1ab}:



Но откуда следует, что четырехугольник, который только что построен, является коммутативным? Здесь МакЛейн предлагает еще один совет: используйте подходящие естественности.

В общем, естественность означает, что следующий квадрат является коммутативным:

$$\begin{tikzcd} Fx \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, "\alpha_x"'] & Fy \arrow[d, "\alpha_y"] \\ Gx \arrow[r, "Gf"'] & Gy \end{tikzcd}$$

Здесь, имеется естественное преобразование α между функторами F и G; и стрелка $f\colon a \to b$ поднимается каждым, по очереди.

Теперь сравните это с четырехугольником, который имеется на приведенной диаграмме:

$$\begin{tikzcd}
((11)(ab)) \arrow[r, "\rho_1(ab)"] \arrow[d, "\alpha_{(11)ab}"'] & 1(ab) \arrow[d, "\alpha_{1ab}"] \\
((11)a)b \arrow[r, "(\rho_1 a)b"'] & (1a)b
\end{tikzcd}$$

Если смотреть на это достаточно долго, можно обнаружить, что действительно можно идентифицировать два функтора, оба параметризуемые парой объектов, a и b:

$$F_{ab}x = x(ab)$$
$$G_{ab}x = (xa)b$$

Получаем:

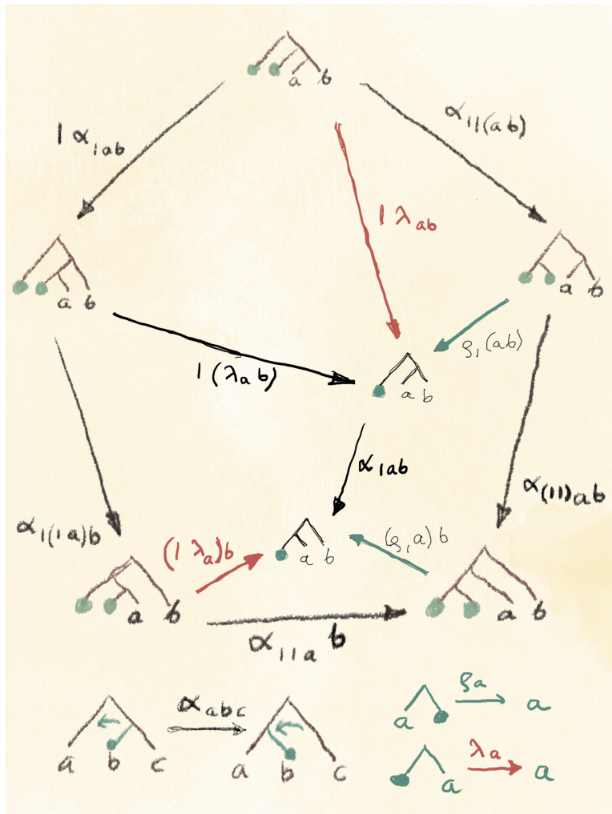
$$\begin{tikzcd}
F_{ab}(11) \arrow[r, "\rho_1(ab)"] \arrow[d, "\alpha_{(11)ab}"'] & F_{ab}1 \arrow[d, "\alpha_{1ab}"] \\
G_{ab}(11) \arrow[r, "(\rho_1 a)b"'] & G_{ab}1
\end{tikzcd}$$

Естественным преобразованием, о котором идет речь, является ассоциатор α_{xab}. Естественность используется в первом аргументе, сохраняя два других постоянными. Стрелка, которая поднимается, — это $\rho_1\colon 1 \otimes 1 \to 1$. Первый функтор поднимает ее до $\rho_1(ab)$, а второй — до $(\rho_1 a)b$.

Таким образом, коммутативный пятиугольник успешно уменьшен.

Левый унитор

Теперь мы готовы получить еще один четырехугольник, используя дважды вискеризованный левый унитор $1(\lambda_a b)$.



Снова используем естественность, на этот раз в среднем аргументе α.

$$\begin{tikzcd}
1((1a)b) \arrow[r, "1(\lambda_a b)"] \arrow[d, "\alpha_{1(1a)b}"'] & 1(ab) \arrow[d, "\alpha_{1ab}"] \\
1((1a)b \arrow[r, "(1\lambda_a)b"'] & (1a)b
\end{tikzcd}$$

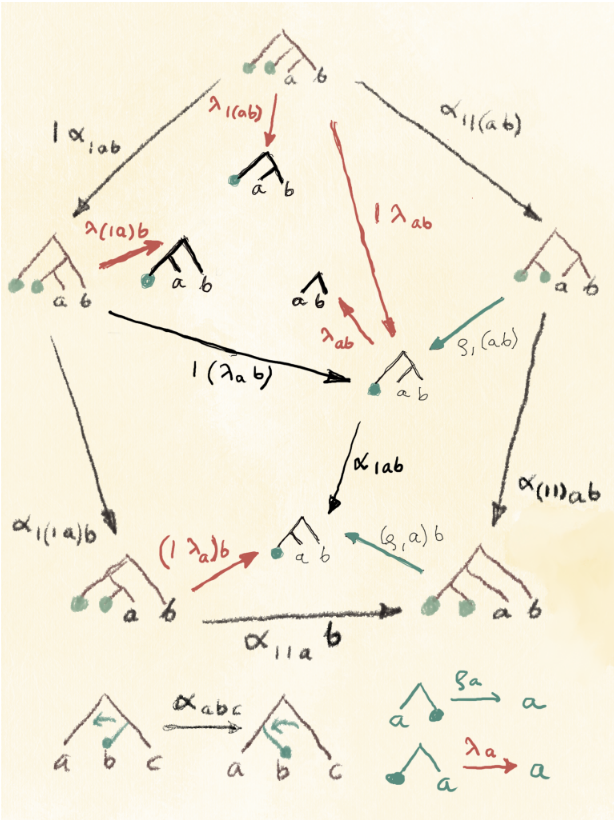
Два функтора — это:

$$F_b x = 1(xb)$$
$$G_b x = (1x)b$$

а стрелка, которую поднимаем, — это λ_a.

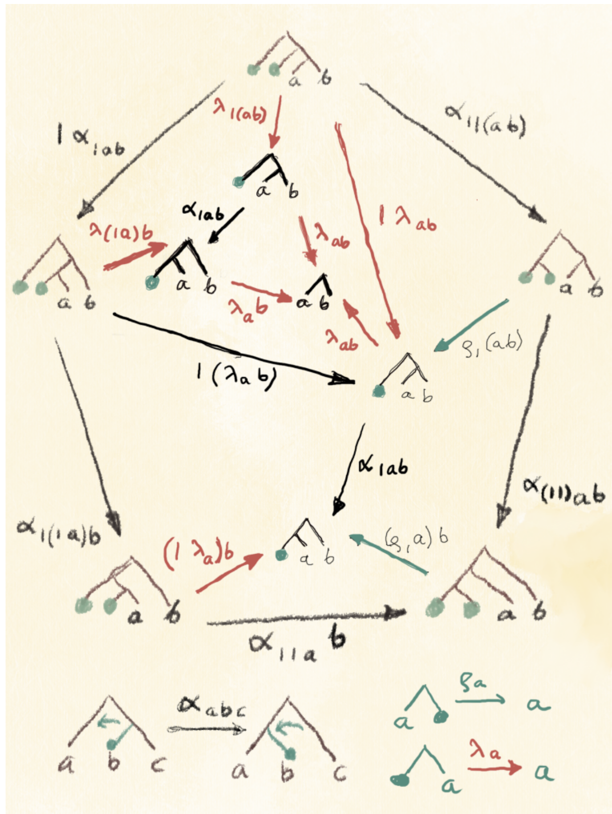
Сжимающийся треугольник

Пятиугольник был успешно уменьшен до треугольника. Для достижения поставленной цели осталось сжать этот треугольник. Это можно сделать, применив λ три раза:



Больше естественности

Последний шаг — соединение трех вершин, формируя целевой треугольник.



На этот раз воспользуемся естественностью λ, чтобы показать, что три четырехугольника являются коммутативными (упражнение для читателя).

Поскольку изложение началось с коммутативного пятиугольника, и все треугольники и четырехугольники, которые были использованы для его сжатия, являются коммутативными, а все стрелки - обратимыми, внутренний треугольник также должен быть коммутативным. Это и завершает доказательство.

Заключение

Я не считаю, что можно заниматься теорией категорий, не используя графические изображения. Конечно, пятиугольную диаграмму МакЛейна можно записать в виде алгебраического уравнения:

$$\alpha_{(a\otimes b)cd} \circ \alpha_{ab(c\otimes d)} = (\alpha_{abc} \otimes d) \circ \alpha_{a(b\otimes c)d} \circ (a \otimes \alpha_{bcd})$$

В программировании мы бы назвали это без-точечным кодированием и считали бы аберрацией. К сожалению, это именно язык таких помощников по доказательству, как Lean, Agda или Coq. Однако, математикам потребуется целая вечность, чтобы формализовать свои теории. Так что, очень нужны помощники по доказательству, работающие с диаграммными формами.

Кстати, инструменты, которые сегодня используют математики для публикации диаграмм, крайне примитивны. Некоторые из более простых диаграмм в этом посте были созданы с использованием плагина `tikz-cd` из LaTeX, но для создания более сложных изображений мне приходится переключаться на инструмент рисования для iPad под названием ProCreate, который намного более удобен для пользователя.