Профункторное представление полиномиальных линз

Bartosz Milewski

Перевод:
Геннадий Чернышев
(https://henrychern.wordpress.com/)

Мотивация

В этом сообщении будет рассмотрена подкатегория из **Poly**, состоящая из полиномиальных функторов, в которых расслоение выполняется над одним фиксированным множеством N:

$$P(y) = \sum_{n \in N} s_n \times \mathbf{Set}(t_n, y)$$

Причина этого ограничения в том, что морфизмы между такими функторами, которые называются *полиномиальными* линзами, можно понимать в терминах моноидальных действий. Оптика, обладающая этим свойством, автоматически имеет профункторное представление, которое имеет то преимущество, что оно позволяет компоновать оптику, используя регулярную композицию функций.

Ранее я исследовал представления полиномиальных линз как оптики в терминах функторов и профункторов дискретных категорий. С помощью всего лишь нескольких модификаций можно сделать эти категории недискретными. Прием заключается в том, чтобы заменить суммы на ко-концы, а произведения на концы; и, когда это уместно, интерпретировать концы как естественные преобразования.

Моноидальное действие

Экзистенциальное представление линзы между полиномами, в которой все расслоения принадлежат одному и тому же множеству N, имеет вид:

$$\mathbf{Pl}\langle s,t\rangle\langle a,b\rangle \cong \int^{c_{ki}} \prod_{k\in N} \mathbf{Set}\left(s_k, \sum_{n\in N} a_n \times c_{nk}\right) \times \prod_{i\in N} \mathbf{Set}\left(\sum_{m\in N} b_m \times c_{mi}, t_i\right)$$

Это делает матрицы c_{nk} «квадратными». Такие матрицы можно умножать, используя соответствующий вариант умножения матриц.

Интересно, что эта идея естественным образом обобщается на случай, когда N заменяется недискретной категорией $\mathcal{N}$. В такой настройке запишем остатки c_{mn} как профункторы:

$$c\langle m,n\rangle \colon \mathcal{N}^{op} \times \mathcal{N} \to \mathbf{Set}$$

Это объекты *моноидальной категории*, в которых тензорное произведение задается профункторной композицией:

$$(c \diamond c')\langle m,n\rangle = \int^{k\colon \mathcal{N}} c\langle m,k\rangle \times c'\langle k,n\rangle$$

а единицей является $\hom$-функтор $\mathcal{N}(m,n)$ (моноид в этой категории называется *промонадой*).

В случае дискретной категории $\mathcal{N}$ эти определения распадаются на стандартное матричное умножение

$$\sum_k c_{mk} \times c'_{kn}$$

и дельта Кронеккера δ_{mn}.

Определим моноидальное действие профунктора c, действующего на ко-предпучок a, как:

$$(c \bullet a)(m) = \int^{n\colon \mathcal{N}} a(n) \times c\langle n,m\rangle$$

Это напоминает умножение вектора на матрицу. Такое действие моноидальной категории наделяет ко-предпучковую категорию структурой *актегории*.

Произведение $\hom$-множеств в определении экзистенциальной оптики превращается в множество естественных преобразований в функторной категории $[\mathcal{N}, \mathbf{Set}]$.

$$\mathbf{Pl}\langle s,t\rangle\langle a,b\rangle \cong \int^{c\colon [\mathcal{N}^{op}\times\mathcal{N}, Set]} [\mathcal{N}, \mathbf{Set}]\,(s, c\bullet a) \times [\mathcal{N}, \mathbf{Set}]\,(c\bullet b, t)$$

Или, используя обозначение конца для естественных преобразований:

$$\int^{c} \left(\int_m \mathbf{Set}\,(s(m), (c\bullet a)(m)) \times \int_n \mathbf{Set}\,((c\bullet b)(n), t(n)) \right)$$

Как и выше, можно исключить ко-конец, если удастся изолировать c во втором $\hom$-множестве, используя серию изоморфизмов:

$$\int_n \mathbf{Set}\left(\int^k b(k) \times c\langle k,n\rangle, t(n) \right) \cong$$

$$\int_n \int_k \mathbf{Set}\,(b(k) \times c\langle k,n\rangle, t(n)) \cong \int_{n,k} \mathbf{Set}\,(c\langle k,n\rangle, [b(k), t(n)])$$

Здесь используется тот факт, что отображение ко-конца является концом. Результат после применения леммы Йонеды, для устранения конца над k, будет таким:

$$\mathbf{Pl}\langle s,t\rangle\langle a,b\rangle \cong \int_m \mathbf{Set}\left(s(m), \int^j a(j) \times [b(j), t(m)] \right)$$

или, с некоторым злоупотреблением обозначениями:

$$[\mathcal{N}, \mathbf{Set}](s, [b,t]\bullet a)$$

Когда $\mathcal{N}$ является дискретным множеством, эта формула переходит в формулу для полиномиальной линзы.

Профункторное представление

Поскольку эта поли-линза является частным случаем общей оптики, она автоматически имеет профункторное представление. Хитрость заключается в том, чтобы определить обобщенный модуль Тамбары, то есть категорию $\mathcal{T}$ профункторов типа:

$$P\colon [\mathcal{N}, \mathbf{Set}]^{op} \times [\mathcal{N}, \mathbf{Set}] \to \mathbf{Set}$$

с дополнительной структурой, заданной следующим семейством преобразований, в компонентах:

$$\alpha_{c,s,t} \colon P\langle s,t\rangle \to P\left\langle c \bullet s, c \bullet t\right\rangle$$

Тогда профункторное представление полиномиальной линзы задается концом по всем профункторам в этой категории Тамбары:

$$\mathbf{Pl}\langle s,t\rangle\langle a,b\rangle \cong \int_{P \colon \mathcal{T}} \mathbf{Set}\left((UP)\langle a,b\rangle, (UP)\langle s,t\rangle\right)$$

где U — очевидный забывающий функтор от $\mathcal{T}$ к базовой категории профункторов.

Это следует из общих соображений, но, для удобства, воспроизведем доказательство.

Первое наблюдение заключается в том, что, поскольку мы варьируем P, то $(UP)\left\langle a,b\right\rangle$ можно рассматривать как действие ϵ, аппликативного функтора, на P. Он принимает профунктор и производит множество:

$$\epsilon_{a,b} : [\mathcal{D}, \mathbf{Set}] \to \mathbf{Set}$$
$$\epsilon_{a,b} Q = Q\left\langle a,b\right\rangle$$

где категория $\mathcal{D}$ — это, в нашем случае, $[\mathcal{N}, \mathbf{Set}]^{\mathsf{op}} \times [\mathcal{N}, \mathbf{Set}]$.

Таким образом, профункторная линза является морфизмом (естественным преобразованием) в категории Тамбары:

$$\mathcal{T}(\epsilon_{a,b}(U-), \epsilon_{s,t}(U-))$$

Действие аппликативного функтора можно переписать, с помощью леммы Йонеды:

$$\epsilon_{a,b} Q = Q\left\langle a,b\right\rangle \cong [\mathcal{D}, \mathbf{Set}]\left(\mathcal{D}(\left\langle a,b\right\rangle, -), Q\right)$$

Теперь предположим, что существует левый сопряженный F к U, который свободно порождает модули Тамбары из регулярных профункторов.

$$[\mathcal{D}, \mathbf{Set}]\left(Q, UP\right) \cong \mathcal{T}(FQ, P)$$

Тогда можно записать:

$$\epsilon_{a,b}(UP) \cong [\mathcal{D}, \mathbf{Set}]\left(\mathcal{D}(\left\langle a,b\right\rangle, -), UP\right) \cong \mathcal{T}(F\mathcal{D}(\left\langle a,b\right\rangle, -), P)$$

Тогда линза представляет собой естественное преобразование в категории Тамбары между двумя естественными преобразованиями в категории Тамбары. По лемме Йонеды, это изоморфно:

$$\mathcal{T}(F\mathcal{D}(\langle s,t\rangle, -), F\mathcal{D}(\langle a,b\rangle, -))$$

Теперь можно снова использовать сопряжение, чтобы привести его к естественному преобразованию в категории профункторов:

$$[\mathcal{D}, \mathbf{Set}]\,(\mathcal{D}(\langle s,t\rangle, -), (UF)\mathcal{D}(\langle a,b\rangle, -))$$

Наконец, применяя лемму Йонеды, получаем:

$$\mathbf{Pl}\langle s,t\rangle\langle a,b\rangle \cong \Phi(\mathcal{D}(\langle a,b\rangle, -))\,\langle s,t\rangle$$

где $\Phi = UF$ — монада, порожденная сопряжением $F \vdash U$.

Формула для Φ:

$$(\Phi P)\,\langle s,t\rangle = \int^{\langle x,y\rangle, c} \mathcal{D}(\langle c \bullet x, c \bullet y\rangle, \langle s,t\rangle) \times P\,\langle x,y\rangle$$

Алгебры монад для Φ — это в точности модули Тамбары. Действительно:

$$[\mathcal{D}, \mathbf{Set}]\,(\Phi P, P) \cong \int_{\langle s,t\rangle} \mathbf{Set}(\int^{\langle x,y\rangle, c} \mathcal{D}(\langle c \bullet x, c \bullet y\rangle, \langle s,t\rangle) \times P\,\langle x,y\rangle, P\,\langle s,t\rangle)$$

По непрерывности hom-функтора, это изоморфно:

$$\int_{\langle s,t\rangle, \langle x,y\rangle, c} \mathbf{Set}(\mathcal{D}(\langle c \bullet x, c \bullet y\rangle, \langle s,t\rangle) \times P\,\langle x,y\rangle, P\,\langle s,t\rangle)$$

Мы можем каррировать это к:

$$\int_{\langle s,t\rangle, \langle x,y\rangle, c} \mathbf{Set}(\mathcal{D}(\langle c \bullet x, c \bullet y\rangle, \langle s,t\rangle)[P\,\langle x,y\rangle, P\,\langle s,t\rangle])$$

и, с помощью леммы Йонеды, получить:

$$\int_{\langle x,y\rangle, c} [P\,\langle x,y\rangle, P\,\langle c \bullet x, c \bullet y\rangle]$$

что, покомпонентно, есть структура Тамбары:

$$\alpha_{c,x,y} : P \langle x, y \rangle \to P \langle c \bullet x, c \bullet y \rangle$$

На последнем этапе, оценка дает:

$$\mathbf{Pl}\langle s, t\rangle\langle a, b\rangle \cong \Phi(\mathcal{D}(\langle a, b\rangle, -))\langle s, t\rangle$$

Мы получили:

$$\int^{\langle x,y\rangle, c} \mathcal{D}(\langle c \bullet x, c \bullet y\rangle, \langle s, t\rangle) \times \mathcal{D}(\langle a, b\rangle, \langle x, y\rangle)$$

Применяя лемму Ко-Йонеды, имеем:

$$\int^{c} \mathcal{D}(\langle c \bullet a, c \bullet b\rangle, \langle s, t\rangle)$$

что есть экзистенциальная форма полиномиальной линзы:

$$\int^{c} [\mathcal{N}, \mathbf{Set}](s, c \bullet a) \times [\mathcal{N}, \mathbf{Set}](c \bullet b, t)$$