Полиномиальная линза

Bartosz Milewski

Перевод:
Геннадий Чернышев
(https://henrychern.wordpress.com/)

Мотивация

Кажется, что линзы возникают в самых неожиданных местах. Недавно появился новый тип линз, как множество морфизмов между полиномиальными функторами. Эта линза, казалось, не подходила под обычную классификацию оптик, поэтому не сразу стало ясно, что она имеет экзистенциальное представление с использованием ко-концов и, следовательно, профункторное представление с использованием концов. Профункторное представление оптики представляет особый интерес, поскольку оно позволяет скомпоновать оптику, используя стандартную композицию функций. В этом сообщении я покажу, как полиномиальная линза вписывается в рамки общей оптики.

Полиномиальные функторы

Полиномиальный функтор в **Set** может быть записан как сумма (копроизведение) представимых величин:

$$P(y) = \sum_{n \in N} s_n \times \mathbf{Set}(t_n, y)$$

Два семейства множеств, s_n и t_n, индексируются элементами множества N (в частности, можно предполагать, что это множество натуральных чисел, но подойдет любое множество). Другими словами, они являются расслоениями некоторых множеств S и T над N. В программировании такие семейства называются зависимыми типами. Также, можно считать эти расслоения функторами от дискретной категории $\mathcal{N}$ к $\mathbf{Set}$.

Поскольку в $\mathbf{Set}$ внутреннее hom-множество изоморфно внешнему hom, полиномиальный функтор иногда записывается в экспоненциальной форме, что делает его более похожим на настоящий полином или степенной ряд:

$$P(y) = \sum_{n \in N} s_n \times y^{t_n}$$

или, представив все множества s_n в виде сумм синглетонов:

$$P(y) = \sum_{n \in N} y^{t_n}$$

Также будет использоваться обозначение $[t_n, y]$, для внутреннего hom:

$$P(y) = \sum_{n \in N} s_n \times [t_n, y]$$

Полиномиальные функторы образуют категорию $\mathbf{Poly}$, в которой морфизмы являются естественными преобразованиями.

Рассмотрим два полиномиальных функтора P и Q. Естественное преобразование между ними можно записать в виде конца. Сначала раскроем исходный функтор:

$$\mathbf{Poly}\left(\sum_k s_k \times [t_k, -], Q\right) = \int_{y \colon \mathbf{Set}} \mathbf{Set}\left(\sum_k s_k \times [t_k, y], Q(y)\right)$$

Отображение суммы изоморфно произведению отображений:

$$\cong \prod_k \int_y \mathbf{Set}\left(s_k \times [t_k, y], Q(y)\right)$$

Мы видим, что естественное преобразование между полиномами может быть сведено к произведению естественных преобразований одночленов.

Итак, рассмотрим отображение одночлена:

$$\int_y \mathbf{Set}\left(s \times [t, y], \sum_n a_n \times [b_n, y]\right)$$

Мы можем использовать каррированное сопряжение:

$$\int_y \mathbf{Set}\left([t, y], \left[s, \sum_n a_n \times [b_n, y]\right]\right)$$

или, в $\mathbf{Set}$:

$$\int_y \mathbf{Set}\left(\mathbf{Set}(t, y), \mathbf{Set}\left(s, \sum_n a_n \times [b_n, y]\right)\right)$$

Теперь можно использовать лемму Йонеды, чтобы исключить конец. Это просто заменит y на t в цели естественного преобразования:

$$\mathbf{Set}\left(s, \sum_n a_n \times [b_n, t]\right)$$

Множество естественных преобразований между двумя произвольными полиномами $\sum_k s_k \times [t_k, y]$ и $\sum_n a_n \times [b_n, y]$ называется полиномиальной линзой. Объединив предыдущие результаты, очевидно, что это можно записать как:

$$\mathbf{PolyLens}\langle s, t\rangle\langle a, b\rangle = \prod_{k\in K} \mathbf{Set}\left(s_k, \sum_{n\in N} a_n \times [b_n, t_k]\right)$$

Отметим, что в общем случае множества K и N различны.

Используя понятие зависимого типа, можно охарактеризовать полиномиальную линзу как действующую сразу на все семейство типов. Для заданного значения типа s_k она определяет индекс n. Интересно то, что этот индекс и, следовательно, тип исходного фокуса a_n и тип нового фокуса b_n зависят не только от типа, но и от значения аргумента s_k.

Простой пример: рассмотрим семейство деревьев с подсчитанными узлами. В этом случае s_k — это тип дерева с k узлами. Для заданного количества узлов все еще могут существовать деревья с разным количеством листьев. Можно определить поли-линзу для таких деревьев, которая фокусируется на листьях. Для заданного дерева она создает вектор подсчитанных листьев a_n и функцию, которая использует вектор подсчитанных листьев b_n (того же размера, но с другим типом листьев) и возвращает новое дерево t_k.

Линзы и расширения Кана

После публикации реализации полиномиальной линзы на Idris Балдур Блёндал (Baldur Blöndal) поделился интересным наблюдением в Твиттере: тип суммы в определении линзы выглядит как левое расширение Кана. В самом деле, если рассматривать a и b как ко-предпучки, то левое расширение Кана a вдоль b задается ко-концом:

$$Lan_b a \cong \int^{n\colon \mathcal{N}} a \times [b, -]$$

Ко-конец над дискретной категорией является суммой (копроизведением), так как условие ко-клина выполняется тривиально.

Точно так же, конец над дискретной категории $\mathcal{K}$ становится произведением. Конец $\hom$-множеств становится естественным преобразованием. Следовательно, полиномиальную линзу можно переписать как:

$$\prod_{k \in K} \mathbf{Set}\left(s_k, \sum_{n \in N} a_n \times [b_n, t_k]\right) \cong [\mathcal{K}, \mathbf{Set}](s, (Lan_b a) \circ t)$$

Наконец, поскольку левое расширение Кана является левым сопряжением предкомпозиции функторов, то получаем очень компактную формулу:

$$\mathbf{PolyLens}\langle s, t\rangle\langle a, b\rangle \cong [\mathbf{Set}, \mathbf{Set}](Lan_t s, Lan_b a)$$

которая работает с произвольными категориями $\mathcal{N}$ и $\mathcal{K}$, для которых существуют соответствующие расширения Кана.

Экзистенциальное представление

Линза — это всего лишь частный случай оптики. Оптика имеет весьма общее представление в качестве экзистенциальных типов или, говоря категорно, може рассматриваться как ко-концы.

Общая идея состоит в том, что оптика описывает различные способы разложения типа на фокус (или несколько фокусов) и остаток. Остаток является экзистенциальным типом. Его единственное свойство состоит в том, что его можно комбинировать с новым фокусом (или фокусами) для получения нового составного объекта.

Вопрос в том, что представляет собой остаток в случае полиномиальной линзы? Интуиция, порождаемая примером дерева с подсчитанными узлами, подсказывает, что такой остаток должен быть параметризован как количеством узлов, так и количеством листьев. Он должен кодировать форму дерева с заполнителями, заменяющими листья.

В общем случае, остаток будет дважды индексированным семейством c_{mn} , а экзистенциальная форма поли-линзы будет реализована как ко-конец по всем возможным остаткам:

$$\mathbf{Pl}\langle s,t\rangle\langle a,b\rangle \cong \int^{c_{ki}} \prod_{k\in K} \mathbf{Set}\left(s_k, \sum_{n\in N} a_n \times c_{nk}\right) \times \prod_{i\in K} \mathbf{Set}\left(\sum_{m\in N} b_m \times c_{mi}, t_i\right)$$

Чтобы увидеть, что это представление эквивалентно предыдущему, перепишем сначала отображение суммы в виде произведения отображений:

$$\prod_{i\in K} \mathbf{Set}\left(\sum_{m\in N} b_m \times c_{mi}, t_i\right) \cong \prod_{i\in K}\prod_{m\in N} \mathbf{Set}\left(b_m \times c_{mi}, t_i\right)$$

и используем каррированное сопряжение, получая:

$$\prod_{i\in K}\prod_{m\in N} \mathbf{Set}\left(c_{mi}, [b_m, t_i]\right)$$

Основное наблюдение заключается в том, что если рассматривать множества N и K как дискретные категории $\mathcal{N}$ и $\mathcal{K}$, произведение отображений можно рассматривать как естественное преобразование между функторами. Функторы от дискретной категории — это просто отображения объектов, и условия естественности тривиальны.

Двойной произведение можно считать естественным преобразованием от категории произведений. А поскольку дискретная категория является двойственной самой себе, то можно (предвосхищая общий случай профунктора) переписать наши отображения как естественные преобразования:

$$\prod_{i \in K} \prod_{m \in N} \mathbf{Set}\left(c_{mi}, [b_m, t_i]\right) \cong [\mathcal{N}^{op} \times \mathcal{K}, \mathbf{Set}]\left(c_{=-}, [b_=, t_-]\right)$$

Здесь, индексы были заменены заполнителями. Это обозначение акцентирует интерпретацию b как функтора (ко-предпучка) от $\mathcal{N}$ к $\mathbf{Set}$, t — как функтора от $\mathcal{K}$ к $\mathbf{Set}$, и c — как профунктора на $\mathcal{N}^{op} \times \mathcal{K}$.

Поэтому, можно использовать лемму ко-Йонеды для исключения коконца над c_{ki}. В результате $\mathbf{Pl}\langle s, t\rangle\langle a, b\rangle$ можно записать так:

$$\int^{c_{ki}} \prod_{k \in K} \mathbf{Set}\left(s_k, \sum_{n \in N} a_n \times c_{nk}\right) \times [\mathcal{N}^{op} \times \mathcal{K}, \mathbf{Set}]\left(c_{=-}, [b_=, t_-]\right)$$
$$\cong \prod_{k \in K} \mathbf{Set}\left(s_k, \sum_{n \in N} a_n \times [b_n, t_k]\right)$$

что является в точности исходным преобразованием полинома в полином.

Благодарности

Я благодарен Дэвиду Спиваку (David Spivak), Жюлю Хеджесу (Jules Hedges) и их сотрудникам за то, что они поделились со мной своими идеями и неопубликованными заметками, особенно за то, что убедили меня в том, что в общем случае два множества N и K могут быть разными.