Оптика на ко-предпучках

Bartosz Milewski

Перевод:
Геннадий Чернышев
(https://henrychern.wordpress.com/)

Аннотация

Оптика, базирующаяся на ко-предпучках, — это новый вид оптики, который обобщает полиномиальную линзу. Ее отличительной чертой является то, что она не основана на действии моноидальной категории. Вместо этого, ее действие параметризуется функторами между разными ко-предпучками. Композиция этих действий соответствует композиции функторов, а не, более традиционному, тензорному произведению. Эти функторы и их композиция имеют представление в терминах профункторов.

Мотивация

Многие оптики можно определить с помощью экзистенциального, или с использованием ко-конца, представления:

$$\mathcal{O}\langle a, b\rangle\langle s, t\rangle = \int^{m \colon \mathcal{M}} \mathcal{C}(s, m \bullet a) \times \mathcal{D}(m \bullet b, t)$$

Здесь, $\mathcal{M}$ — это моноидальная категория с действием на объекты двух категорий $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ (будем использовать одинаковые обозначения для обоих действий). Действия компонуются с использованием тензорного произведения в $\mathcal{M}$:

$$n \bullet (m \bullet a) = (n \otimes m) \bullet a$$

Идея этой оптики состоит в том, что имеется пара морфизмов, один из которых декомпонует источник s на действие некоторого m на a, а другой перекомпоновывает цель t вследствие действия того же m на b. В большинстве приложений полагается, что $\mathcal{D}$ совпадает с $\mathcal{C}$.

В последнее время возродился интерес к полиномиальным функторам. Морфизмы между полиномиальными функторами образуют новый вид оптики, который не полностью соответствует этому шаблону. Однако, они допускают экзистенциальное представление[1] или следующую форму:

$$\int^{c_{ki}} \prod_{k\in K} \mathbf{Set}\left(s_k, \sum_{n\in N} a_n \times c_{nk}\right) \times \prod_{i\in K} \mathbf{Set}\left(\sum_{m\in N} b_m \times c_{mi}, t_i\right)$$

Здесь, множества s_k и t_i можно рассматривать как слои над множеством K, тогда как множества a_n и b_m являются слоями над другим множеством N.

В качестве альтернативы, можно рассматривать эти расслоения как функторы от дискретных категорий к $\mathbf{Set}$, то есть, как ко-предпучки. Например, a_n является результатом действия ко-предпучка a на объект n дискретной категории $\mathcal{N}$. Произведения над K можно интерпретировать как концы, которые определяют естественные преобразования между ко-предпучками. Интересно то, что матрицы c_{nk} расслоены на два разных множества. Ранее я интерпретировал их как профункторы[2]:

$$c\colon \mathcal{N}^{op} \times \mathcal{K} \to \mathbf{Set}$$

Здесь я подробнее раскрою эту интерпретацию.

Ко-предпучки

Категория ко-предпучков $[\mathcal{C}, Set]$ во многих отношениях ведет себя как векторное пространство. Например, у нее имеется «базис», состоящий из представимых функторов $\mathcal{C}(r, -)$, в том смысле, что любой ко-предпучок является их копределом. Более того, сохраняющие копределы функторы

[1] https://wordpress.com/post/henrychern.wordpress.com/2141
[2] https://wordpress.com/post/henrychern.wordpress.com/2153

между категориями ко-предпучков, очень похожи на линейные преобразования между векторными пространствами. Особый интерес представляют функторы, сопряженные слева к некоторым другим функторами, поскольку сопряженные слева функторы сохраняют копределы.

Формула полиномиальной линзы имеет вид, наводящий на мысль об интерпретации в векторном пространстве. У нас есть одно векторное пространство с векторами $\vec{s}$ и $\vec{t}$, и другое — с $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Прямоугольные матрицы c_{nk} можно рассматривать как компоненты линейного преобразования между этими векторными пространствами. Можно, например, записать:

$$\sum_{n \in N} a_n \times c_{nk} = c^T a$$

где c^T — транспонированная матрица. Транспозиция здесь служит аналогом сопряжения.

Теперь можно преобразовать формулу полиномиальной линзы в терминах ко-предпучков. Мы больше не интерпретируем $\mathcal{N}$ и $\mathcal{K}$ как дискретные категории. Имеем:

$$a, b \colon [\mathcal{N}, \mathbf{Set}]$$
$$s, t \colon [\mathcal{K}, \mathbf{Set}]$$

В этой интерпретации c является функтором между категориями ко-предпучков:

$$c \colon [\mathcal{N}, \mathbf{Set}] \to [\mathcal{K}, \mathbf{Set}]$$

Запишем действие этого функтора на предпучке a как $c \bullet a$.

Предположим, что этот функтор имеет правый сопряженный элемент и, следовательно, сохраняет копределы.

$$[\mathcal{K}, \mathbf{Set}](c \bullet a, t) \cong [\mathcal{N}, \mathbf{Set}](a, c^\dagger \bullet t)$$

где

$$c^\dagger \colon [\mathcal{K}, \mathbf{Set}] \to [\mathcal{N}, \mathbf{Set}]$$

Теперь можно обобщить полиномиальную оптическую формулу:

$$\mathcal{O}\langle a, b\rangle\langle s, t\rangle = \int^c [\mathcal{K}, \mathbf{Set}]\,(s, c \bullet a) \times [\mathcal{K}, \mathbf{Set}]\,(c \bullet b, t)$$

Ко-конец берется по всем функторам, имеющим правый сопряженный. К счастью, для таких функторов существует лучшее представление. Оказывается, что функторы, сохраняющие копредел:

$$c\colon [\mathcal{N}, \mathbf{Set}] \to [\mathcal{K}, \mathbf{Set}]$$

эквивалентны профункторам (доказательство см. в Приложении). Такой профунктор:

$$p\colon \mathcal{N}^{op} \times \mathcal{K} \to \mathbf{Set}$$

задается формулой:

$$p\langle n, k\rangle = c(\mathcal{N}(n, -))k$$

где $\mathcal{N}(n, -)$ — представимый ко-предпучок.

Действие c можно выразить как ко-конец:

$$(c \bullet a)k = \int^{n} a(n) \times p\langle n, k\rangle$$

Оптика ко-предпучка в таком случае совпадает с ко-концом всех профункторов $p\colon \mathcal{N}^{op} \times \mathcal{K} \to \mathbf{Set}$:

$$\int^{p} [\mathcal{K}, \mathbf{Set}] \left(s, \int^{n} a(n) \times p\langle n, -\rangle\right) \times [\mathcal{K}, \mathbf{Set}] \left(\int^{n'} b(n') \times p\langle n', -\rangle, t\right)$$

Композиция

Мы определили $c \bullet a$ как действие функтора на ко-предпучке. Для двух компонуемых функторов:

$$c\colon [\mathcal{N}, \mathbf{Set}] \to [\mathcal{K}, \mathbf{Set}]$$

и

$$c'\colon [\mathcal{K}, \mathbf{Set}] \to [\mathcal{M}, \mathbf{Set}]$$

автоматически получается закон ассоциативности:

$$c' \bullet (c \bullet a) = (c' \circ c)a$$

Композиция функторов между ко-предпучками непосредственно переводится в композицию профункторов. В самом деле, профунктор $p' \diamond p$, соответствующий $c' \circ c$, задается следующим образом:

$$(p' \diamond p)\langle n, m\rangle = (c' \circ c)(\mathcal{N}(n, -))m$$

и может быть сведен к:

$$(c'(c(\mathcal{N}(n, -)))m \cong \int^k c(\mathcal{N}(n, -))k \times p'\langle k, m\rangle \cong \int^k p\langle n, k\rangle \times p'\langle k, m\rangle$$

что является стандартным определением профункторной композиции.

Рассмотрим две компонуемые оптики ко-предпучков,

$$\mathcal{O}\langle a, b\rangle\langle s, t\rangle \qquad \text{и} \qquad \mathcal{O}\langle a', b'\rangle\langle a, b\rangle$$

Первая показывает, что существуют c и пара естественных преобразований:

$$l_c(s, a) = [\mathcal{K}, \mathbf{Set}]\,(s, c \bullet a)$$
$$r_c(b, t) = [\mathcal{K}, \mathbf{Set}]\,(c \bullet b, t)$$

Аналогично, для второй, существуют c' и пара:

$$l'_{c'}(a, a') = [\mathcal{K}, \mathbf{Set}]\,(a, c' \bullet a')$$
$$r'_{c'}(b', b) = [\mathcal{K}, \mathbf{Set}]\,(c' \bullet b', b)$$

Композиция этих оптик должна быть оптикой типа $\mathcal{O}\langle a', b'\rangle\langle s, t\rangle$. Действительно, можно построить такую оптику, используя композицию $c' \circ c$ и пару естественных преобразований:

$$s \xrightarrow{l_c(s,a)} c \bullet a \xrightarrow{c \circ l'_{c'}(a,a')} c \bullet (c' \bullet a') \xrightarrow{assoc} (c \circ c') \bullet a'$$
$$(c \circ c') \bullet b' \xrightarrow{assoc^{-1}} c \bullet (c' \bullet b') \xrightarrow{c \circ r'_{c'}(b',b)} c \bullet b \xrightarrow{r_c(b,t)} t$$

Обобщения

По двойственности, имеется соответствующая оптика, основанная на предпучках. Кроме того, (ко-)предпучки могут быть естественным образом обобщены на обогащенные категории, где также выполняется соответствие между левыми сопряженными функторами и обогащенными профункторами.

Приложение

Покажем, что функтор между двумя ко-предпучками, который имеет правый сопряженный элемент и, следовательно, сохраняет копределы:

$$c\colon [\mathcal{N}, \mathbf{Set}] \to [\mathcal{K}, \mathbf{Set}]$$

эквивалентен профунктору:

$$p\colon \mathcal{N}^{op} \times \mathcal{K} \to \mathbf{Set}$$

Этот профунктор задается как:

$$p\langle n, k\rangle = c(\mathcal{N}(n, -))k$$

а функтор с восстанавливается по формуле:

$$c(a)k = \int^{n'} a(n') \times p\langle n', k\rangle$$

где $a\colon [\mathcal{N}, \mathbf{Set}]$.

Покажем, что эти формулы обратны друг другу. Во-первых, вставка формулы для c в определение p должна дать p:

$$\int^{n'} \mathcal{N}(n, -)(n') \times p\langle n', k\rangle \cong p\langle n, k\rangle$$

получающееся из леммы ко-Йонеды.

Во-вторых, вставка формулы для p в определение c должна вернуть c:

$$\int^{n'} an' \times c(\mathcal{N}(n', -))k \cong c(a)k$$

Поскольку c сохраняет все копределы, а любой ко-предпучок является копределом представимых, достаточно доказать, что для представимого имеет место:

$$a(n) = \mathcal{N}(r, n)$$

Остается показать, что:

$$\int^{n'} \mathcal{N}(r, n') \times c(\mathcal{N}(n', -))k \cong c(\mathcal{N}(r, -))k$$

но это следует из леммы ко-Йонеды.